CBS
Colegio Bautista Shalom

Matemática IV
Cuarto BACL
Segundo Bimestre

Contenidos

FACTORIZACIÓN

- ✓ CASOS DE FACTORIZACIÓN.
- ✓ RESOLVIENDO CASOS DE FACTORIZACIÓN.
- ✓ CASOS ESPECIALES DE FACTORIZACIÓN.

REPRESENTACIÓN REAL

- ✓ REPRESENTACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES.
- ✓ VALOR ABSOLUTO.
- ✓ POTENCIA REAL.
    - POTENCIAS CON EXPONENTES ENTEROS.
    - POTENCIAS DE NÚMEROS RACIONALES.
    - PROPIEDADES DE POTENCIAS.
    - PROPIEDADES POTENCIA RACIONAL.

NOTA: conforme vayas avanzando en tu aprendizaje debes realizar uno de los ejercicios. Copia y desarrolla cada ejercicio en hojas blanco bond, realiza cada gráfica en hojas milimetradas y sigue las instrucciones de tu catedrático(a) para entregar.

FACTORIZACIÓN

Se llaman factores o divisores de una expresión algebraica, a los términos que multiplicados entre sí dan como producto la primera expresión.

Al factorizar una expresión, la escribimos como un producto de sus factores. Suponiendo que tenemos dos números 4 y 7. En este caso, te solicitan sean multiplicados: $4 \times 7 = 28$

Durante el procedimiento, tenemos un producto de 28 y se nos pide que lo factoricemos; entonces, tendremos: $28 = 4 \times 7$

Dentro de los polinomios podemos encontrar expresiones algebraicas que, conforme a la cantidad de monomios que contenga se les clasifica:

Factorización $\longrightarrow$

$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
$24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$
$24 = 4 \cdot 6$
$24 = 8 \cdot 3$
$24 = 12 \cdot 2$

$\longleftarrow$ Multiplicación

Suma o diferencia

$3x^2 \pm 2y$

Monomios

Binomio: expresión algebraica que contiene una suma o diferencia de dos monomios.

Suma o diferencia

$4x^2 \pm 5xy \pm 3y$

Monomios

Trinomio: expresión algebraica que contiene tres monomios y entre estos existe una suma o diferencia.

Los dos anteriores son tipos de polinomio en los cuales se emplean métodos especiales para factorizar. En el caso de las expresiones de más de tres monomios se quedan denominados con el término polinomio; dado su significado: varios monomios.

Para efectos de poder factorizarlos empleando métodos en especiales. Ejemplo de polinomio, según la aclaración anterior.

Suma o diferencia

$5x^4y \pm 15xyz \pm 20yz \pm 10y$

Monomios

CASOS DE FACTORIZACIÓN

La factorización es de extrema importancia en la Matemática, así es que debes tratar de entender lo más que puedas sobre lo que vamos a trabajar. Existen varios casos de factorización:

CASO FACTOR COMÚN MONOMIO

Es el factor que está presente en cada uno de los términos del polinomio.

En este caso el factor común es sólo el coeficiente, ya que no hay literal que esté presente en todos los monomios. El coeficiente 4 es la cantidad más pequeña y en esta pueden ser divididos los demás coeficientes.

$$8a - 4b + 16c + 12d =$$
$$4(2a - b + 4c + 3d)$$

Explicación. Se saca el número 4 y se coloca multiplicando al paréntesis. A eso se le dice "sacar factor común 4". Luego, se divide cada término por el número 4, y se colocan todos los resultados dentro del paréntesis, sumando o restando según el signo que resulte de la división.

Primer término:

$$\frac{8a}{4} = 2a$$

este término resultó "positivo"

¿Por qué el número 4? Los números 8, 4, 16 y 12, son divisibles 4. Como en todos los términos hay números divisibles por 4, se dice que "hay factor común 4".

8 es igual a **4** x 2
4 es igual a **4** x 1
16 es igual a **4** x 4
12 es igual a **4** x 3

Como el número 4 está multiplicando en todos los términos, es un "factor común".

Segundo término:

$$\frac{-4b}{4} = -b$$

este término resultó "negativo"

Tercer término:

$$\frac{16c}{4} = 4c$$

Cuarto término:

$$\frac{12d}{4} = 3d$$

Es así, como obtienes cada uno de los términos de la solución: $4(2a - b + 4c + 3d)$

Encontrar el factor común 4 significa "dividir a todos los términos por 4". Al realizar esta división entre un número positivo, los términos resultaron con el mismo signo que ya tenían. Esto por la ley de signos.

VERIFICACIÓN DE LA FACTORIZACIÓN DE LA EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Se realiza la distributiva en el resultado. En palabras más simples, debes de aplicar la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y la resta. Esto te dará como resultado la expresión algebraica original.

En el polinomio ya factorizado:

$$4(2a - b + 4c + 3d)$$

$$4 \times 2a = 8a$$

$$4 \times (-b) = -4b$$

$$4 \times 4c = 16c$$

$$4 \times 3d = 12d$$

El resultado será:

$$8a - 4b + 16c + 12d$$

Estos son los 4 términos que tenía en el polinomio original, con los signos correctos, entonces está bien factorizado: las dos expresiones son equivalentes.

Ahora, no sólo son divisibles por 4, sino también por 2, y hasta por 1. En este caso es necesario sacar el **mayor** número posible que divida a todos los términos, y ese número es el 4. Es el llamado Máximo Común Divisor (M.C.D o D.C.M).

Si no podemos darnos cuenta a simple vista de cuál es ese número, entonces podemos usar la regla del D.C.M para calcularlo. Es decir que el "factor común" que nos piden sacar entre varios números es su Máximo Común Divisor. Para mayor comprensión, este ejemplo:

$$9x^3 - 6x^2 + 12x^5 - 18x^7 =$$
$$3x^2\,(3x - 2 + 4x^3 - 6x^5)$$

Solución:

Se saca el factor común $3x^2$. Ya que, el factor común entre los números es 3, y entre las letras es x^2, ya que es la x con el menor exponente con que aparece en el polinomio.

Se divide cada término por $3x^2$, recordando que para dividir las letras hay que restar los exponentes. Aplicando la propiedad de división de potencias de igual base.

RECORDATORIO:

Encontrando el M.C.D.:

18 – 12 – 6 – 9 | 3
6 – 4 – 2 – 3 |

Divisibles en 2 | Divisible en 3

Hasta acá se queda porque uno de los coeficientes no es divisible en el número 2, el cual divide al resto de número. Por tanto, el M.C.D es el 3.

Primer término:

$$\frac{9x^3}{3x^2} = 3x$$

"9 dividido 3 da como resultado 3""Por el lado de los números"
"x^3 dividido x^2 = x^{3-2} = x^1 = x " "Por el lado de las letras".

Segundo Término:

$$\frac{-6x^2}{3x^2} = -2$$

"-6 dividido 3 resulta -2"
"x^2 dividido x^2 resulta 1"

Tercer Término:

$$\frac{12x^5}{3x^2} = 4x^3$$

"12 dividido 3 resulta 4"
"x^5 dividido x^2 resulta x^3"

Cuarto Término:

$$\frac{-18x^4}{3x^2} = -6x^2$$

" -18 dividido 3 resulta -6 "
" x^4 dividido x^2 resulta x^2"

El número 3 es factor común, ya que el número 3 divide exactamente a 9, 6, 12 y 18. Es el Máximo Común Divisor (MCD o DCM) entre ellos.

Y la "x" está en todos los términos. Entonces es también factor común la x con el menor exponente con que aparece, es decir: x^2. El factor común es entonces $3x^2$.

EJERCICIO 01: resuelve (en hojas aparte) los siguientes casos de factorización por factor común monomio.

1. $a^2 + 2a$ **2.** $10b - 30ab^2$ **3.** $10a^2 + 5a + 15a^3$ **4.** $ab - bc$

5. $8m^2 - 12mn$ **6.** $15c^3 3d^2 + 60c^2 2d^3$ **7.** $2x^3 + 4x^2 + 8x^5$ **8.** $10x^6 - 15x^5 + 20x^4 + 30x^2$

9. $6x^3 + 12x^2 + 18x$ **10.** $\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$

CASO FACTOR COMÚN POLINOMIO

Es el polinomio que aparece en cada término de la expresión algebraica como ves en los siguientes ejemplos:

Términos

$$x(a+b) + y(a+b)$$

Factor común

Símbolo de adición (en este caso)

Existe un factor común que es (a + b), entonces este será el factor por el cual divides el polinomio.

$$\frac{x(a+b)}{(a+b)} = x \qquad \frac{y(a+b)}{(a+b)} = y$$

El resultado de la división dará como resultado "x" e "y", estos irán en otro paréntesis como resultado de factorización como un producto. Así:

$$(a+b)(x+y)$$

Otro ejemplo:

Diferencia

Factores restantes

$$2a(m-2n)-b(m-2n)$$

Factor común

$$\frac{2a(m-2n)}{(m-2n)}=2a \qquad -\frac{b(m-2n)}{(m-2n)}=-b$$

$$(m-2n)(2a-b)$$

EJERCICIO 02: resuelve (en hojas aparte) los siguientes casos de factorización por factor común polinomio.

1. $a(x+1)+b(x+1)$ **2.** $x(p+q)+y^2(p+q)$
3. $m(2a+b)+p(2a+b)$ **4.** $(a^2+1)-b(a^2+1)$
5. $(1-x)+5c(1-x)$ **6.** $a(2+x)-(2+x)$
7. $(x+y)(n+1)-3(n+1)$ **8.** $(a+1)(a-1)-2(a-1)$
9. $a(a+b)-b(a+b)$ **10.** $(2x+3)(3-r)-(2x-5)(3-r)$

CASO FACTOR COMÚN POR AGRUPACIÓN

Es llamado factor común por medio de la agrupación de los términos de polinomio, si estos pueden reagruparse si tienen un factor en común pero a su vez distintos de cada grupo.

Cuando pueden reunirse en grupos de igual número de términos se le saca en cada uno de ellos el factor común. Si queda la misma expresión en cada uno de los grupos entre paréntesis, se la saca este grupo como factor común; quedando así una multiplicación de polinomios.

Al momento de iniciar la factorización, es importante tener cuidado que vayan quedando iguales los términos de cada paréntesis, nos hará más sencillo el resolver estos problemas. Por ejemplo:

$$(2bx-by-5b)$$

$$2ax+2bx-ay+5a-by+5b$$

$$(2ax-ay-5a)$$

$(2ax-ay-5a)+(2bx-by-5b)$

Se agrupan los términos que tienen un factor común:

$$(2ax-ay+5a)+(2bx-by+5b)$$

Se encuentra el factor común de cada grupo:

$$a(2x-y+5)+b(2x-y+5)$$

Como las expresiones encerradas entre paréntesis son iguales se tiene:

$$(2x - y + 5)(a + b)$$

Ejemplo 2:

$$m(x+2) - x - 2 + 3(x+2) =$$
$$(x+2)(m+3) - 1(x+2) =$$
$$(x+2)[(m+3) - 1] =$$
$$(x+2)(m+3-1)$$

Distinta forma de hacerlo:

$$m(x+2) - x - 2 + 3(x+2) =$$
$$(x+2)(m+3) - 1(x+2) =$$
$$(x+2)[(m+3) - 1] =$$
$$(x+2)(m+3-1)$$

Ejemplo 3:

$$4a \; - \; 4b \; + \; xa \; - \; xb$$

En este ejemplo se agrupan los términos 4a y 4b (ya que entre hay factor común "4" entre estos). Ahora, los términos xb con xa (ya que hay factor común "x" entre estos).

Al sacar factor común 4 en los primeros dos términos, queda:

$$4(a-b)$$

Al sacar factor común x en los dos últimos términos, queda:

$$x(a-b)$$

$$4(a-b) + x(a-b)$$

Los resultados del factor común en las dos agrupaciones son (a – b). Entonces, este será el factor común.

$$(a-b)(4+x)$$

En este polinomio, se puede agrupar de otra forma: 4a con xa entre un paréntesis y 4b con xb en otro paréntesis.

Pero cuando se saca el factor común "positivo" en ambos grupos, entonces quedará lo siguiente:

$$4a - 4b + xa - xb = se\ han\ agrupado\ 1ro\ con\ 3ro, y\ 2do\ con\ 4to$$

$$a(4+x) + b(-4-x)$$
$$= se\ saca\ factor\ común\ en\ las\ dos\ agrupaciones$$

Se puede ver que los resultados no son idénticos: $(4+x)$ por un lado, y $(-4-x)$ por otro lado.

Esto hace más complejo al ejercicio, lo cual no significa que no se pueda hacer así.

Entonces, es necesario sacarle un factor común negativo.

En el primer paso quedaron los signos opuestos para los dos términos. Pero en el segundo paso, "se saca el menos afuera y un

¿Se puede sacar factor común negativo?

Sí, y en algunos casos es útil hacerlo, por ejemplo en el caso "Factor Común en grupos".

Si sacamos factor común negativo, cada término queda con el signo contrario al que tenía originalmente.

Por ejemplo:

$$5a \; - \; 5b \; - \; 5c \; + \; 5d \; = \; -5.(-a \; + \; b \; + \; c \; - \; d)$$

Si usamos la regla de los signos en cada división veremos cómo cada resultado queda con el signo contrario al del término original.

cambio de signos" (lo que en realidad es encontrarle un factor común negativo.

En un ejemplo como éste, al sacar factor común "b", podríamos ir "especulando" que si sacara factor común "-b", me quedarían bien los signos.

$$a(4 + x) - b(4 + x)$$
$$(4 + x)(a - b)$$

EJERCICIO 03: resuelve (en hojas aparte) los siguientes casos de factorización por agrupación de términos.

1. $4a + 4b + xa + xb$

2. $4a + 4b + xb + xa$

3. $4a - 4b + xb - x$

4. $-4a - 4b - xa - xb)$

5. $a^2b^3 - n^4 + a^2b^3x^2 - n^4x^2 - 3a^3b^3x + 3n^4x$

6. $a^2 + ab + ax + bx$

7. $2x^2 + 8x + 3x + 12$

8. $3x^2 + 6x + 4x + 8$

9. $3x^2 - 6x - 4x + 8)$

10. $a^3 - 2a^2 + 4xa - 8x$

11. $4x^2y - 6x^2 - 3y^2 + 2y^3$

12. $2m^2p^2 - 3p - 6m^2 + p^3$

13. $4ax - 9b + 3a - 12bx$

14. $\frac{1}{5}x^3y - 3xy^2 - \frac{1}{5}x^2z + 3yz$

15. $-13xy^2 - 26xy + y + 2$

CASO TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Es el trinomio (polinomio de tres términos) tal que, dos de sus términos son cuadrados perfectos y el otro término es el doble producto de las bases de esos cuadrados. Su denotación es: $a^2 - 2ab + b^2$

Es un trinomio cuadrado perfecto; si el primer y tercer término tienen raíz cuadrada exacta (de su literal como del coeficiente) y el término de en medio (segundo término) es el doble del resultado de la multiplicación entre la raíz cuadrada del primer y tercer término.

Por ejemplo:

$$36x^2 + 12xy^2 + y^4$$

$$\sqrt{36x^2} + 12xy^2 + \sqrt{y^4}$$

$$6x \qquad\qquad y^2$$

$$2 \times (6x)(y^2)$$

$$12xy^2$$

Comprobando que el doble del resultado de la multiplicación entre las raíz cuadrada del primer como del tercer término, es el término de en medio (o segundo término) del polinomio original. Se coloca entre paréntesis la suma de estos y se elevan al cuadrado. Esta será la factorización del polinomio original:

$$(6x + y^2)^2$$

La combinación de signos (en este caso) es según la ley de signos.

$$36x^2 + 12xy^2 + y^4 = (6x + y^2)^2$$

$$+ \ por + = +$$

En el trinomio cuadrado perfecto los términos cuadrados son siempre positivos, en cambio el término del doble producto puede ser negativo; en este caso debe ser negativo uno de los términos del binomio cuyo cuadrado es el trinomio dado, del ejemplo anterior tenemos:

$$(6x - y^2)^2 = (6x - y^2)(6x - y^2)$$
$$= (6x)^2 - 12xy^2 + (y^2)^2$$

Ó también así:

$$(y^2 - 6x)^2 = (y^2 - 6x)(y^2 - 6x)$$
$$= (6x)^2 - 12xy^2 + (y^2)^2$$

Ambas son respuestas aceptables.

IDENTIFICAR SI UN TRINOMIO ES CUADRADO PERFECTO

Un trinomio ordenado con relación a una letra es cuadrado perfecto cuando la primera y tercer letra son cuadrados perfectos (o tienen raíz cuadrada exacta) y son positivos y el segundo término es el doble producto de sus raíces cuadradas.

Por ejemplo:

$$25 + 10xy + x^2y^2 = (5 + xy)^2$$
$$1 + a^{10} - 2a^5 = (1 - a^5)^2$$
$$225x^4 + 25m^2n^4 - 150x^2mn^2 = (15x^2 + 5mn^2)^2$$

EJERCICIO 04: a continuación se te presentan casos de factorización de la forma trinomio cuadrado perfecto, en hojas aparte y como te lo indique el catedrático realiza encuentra las soluciones correspondientes a cada uno.

1. $a^2 - 2ab + b^2$ **2.** $49m^6 - 70am^3n^2 + 25a^2n^4$ **3.** $9b^2 - 30ab + 25a^2$

4. $b^2 - 12b + 36$ **5.** $16m^2 - 40mn + 25n^2$ **6.** $25a^2c^2 + 20acd + 4d^2$

7. $4x^2 - 20xy + 25y^2$ **8.** $25x^2 + 30x + 9$ **9.** $3a^3 + 24a^2b + 48ab^2$

10. $100x^{10} - 60c^4x^5y^6 + 9c^8y^{12}$

CASO DIFERENCIA DE CUADRADOS

Se le llama diferencia de cuadrados al binomio conformado por dos términos a los que se les puede sacar raíz cuadrada exacta.

Al estudiar tener en mente los productos notables, teníamos que:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

En donde el resultado es una diferencia de cuadrados, pero para esta sección es el caso contrario:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Donde siempre la diferencia de cuadrados es igual al producto de la suma por la diferencia de sus bases.

Procedimiento:

- ✓ Se extrae la raíz cuadrada de ambos términos.

Producto de la suma por la diferencia de dos cantidades.

Básicamente se escriben así:

(a + b)(a – b)

Si los multiplicamos queda:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Entonces el producto notable es:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Se lee: la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia es igual a la diferencia de sus cuadrados.

- ✓ Se multiplica la suma por la diferencia de estas cantidades (el segundo término del binomio negativo es la raíz del termino del binomio que es negativo).

$$\text{Factorizar} \quad x^2 - y^2 \qquad \text{raíces: } \sqrt{x^2} = x \quad \sqrt{y^2} = y \quad \text{respuesta: } \quad (x+y)(x-y)$$

Ejemplos:

$$16m^2 - 9n^2 = (4m + 3n)(4m - 3n)$$

$$y^2 - (9(x-1)^2 = [y + 3(x-1)][y - 3(x-1)] = (y + 3x - 3)(y - 3x + 3)$$

$$49(m+n)^2 - 144(m-n)^2 = [7(m+n) + 12(m-n)][7(m+n) - 12(m-n)] = (19m - 5n)(19n - 5m)$$

CASO ESPECIAL

$$a^2 + 2a(a-b) + (a+b)^2$$

Raíz cuadrada de:

$$a^2 = a$$

Raíz cuadrada de:

$$(a-b)^2 = (a-b)$$

Doble producto sus raíces:

$$(2 \times a \times (a-b) = 2a(a-b)$$

La expresión anterior cumple, entonces:

$$[(a + (a-b)]^2$$

$$(a + a - b) = (2a - b)^2$$

EJERCICIO 05: resuelve (en hojas aparte) los siguientes casos de factorización diferencia de cuadrados.

1. $(1-a)^2$	**2.** $16x^2 - 25y^4$	**3.** $49x^2y^6z^{10} - a^{12}$	**4.** $a^{2n} - 9b^{4m}$
5. $\frac{a^2}{4} - \frac{b^4}{9}$	**6.** $9a^2 - 25b^2$	**7.** $4x^2 - 1$	**8.** $3x^2 - 12$
9. $\frac{a^2}{b^2} - \frac{9}{x^2}$	**10.** $16x^2 - 100$	**25.** $(2x-y)^2 - (3y+z)^2$	**12.** $a^2 - b^2$
13. $4x^2 - 9$	**14.** $7^2x^2 - 4^2$	**15.** $\frac{25}{4} - y^2$	

CASO TRINOMIO CUADRADO PERFECTO POR ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE TÉRMINOS

Se comprueba si el trinomio es cuadrado perfecto, extrayendo la raíz cuadrada al primer y tercer término; las raíces cuadradas de estos términos se multiplican por 2, y este producto se compara con el segundo término del trinomio dado.

Si el 2º término del trinomio no es igual al producto encontrado, no es cuadrado perfecto. Por lo que se procede a convertirlo en un trinomio cuadrado perfecto, de la siguiente manera: se le suma al 2º término la diferencia que falta para que sea igual a producto encontrado en la comprobación del trinomio; y además para que el trinomio dado no varíe hay que restarle esta misma diferencia a todo el trinomio.

Por último se encuentra el resultado como en una diferencia de cuadrados perfectos (Caso IV).

Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} a^4 + a^2 + 1 \\ +\quad a^2 \qquad -a^2 \\ \hline a^4 + 2a^2 + 1 - a^2 \end{array}$$

$$\underbrace{(a^4 + 2a^2 + 1)} - a^2$$

$$(a^2 + 1)^2 - a^2$$

$$(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$$

CASO ESPECIAL ADICIÓN DE DOS CUADRADOS

$$4m^4 + 81n^4$$

$$\begin{array}{r} 4m^4 \qquad\qquad\qquad + 81n^4 \qquad\qquad \\ +36m^2n^2 \qquad\qquad - 36m^2n^2 \\ \hline 4m^4 + 36m^2n^2 + 81n^4 - 36m^2n^2 \end{array}$$

$$(4m^4 + 36m^2n^2 + 81n^4) - 36m^2n^2$$

$$(2m^2 + 9n^2)^2 - 36m^2n^2$$

$$(2m^2 + 9n^2 + 6mn)(2m^2 + 9n^2 - 6mn)$$

$$(2m^2 + 6mn + 9n^2)(2m^2 - 6mn + 9n^2)$$

EJERCICIO 06: resuelve (en hojas aparte) los siguientes casos de Trinomio Cuadrado Perfecto por Adición/Sustracción de Términos, y Adición de Dos Cuadrados.

1. $25^4 + 54a^2b^2 + 49b^4$	**2.** $81a^4b^8 - 29a^2b^4x^8 + 256x^{16}$	**3.** $x^4 + 64y^4$
4. $81a^4 + 64b^4$	**5.** $4x^8 + y^8$	**6.** $4m^8 + 81n^4$
7. $1 + 4n^4$	**8.** $64 + a^{12}$	**9.** $64x^{\mathbf{8}} + \boldsymbol{y^8}$
10. $4 + 625x^8$	**11.** $x^4 + 3x^2 + 4)$	**12.** $x^4 + x^2 + 1$
13. $16m^4 - 25m^2n^2 + 9n^4$	**14.** $a^4 + a^2 + 1$	**15.** $4a^4 + 3a^2b^2 + 9b^4$

CASO TRINOMIO DE LA FORMA X² +BX + C

Procedimiento:

- Se descompone el trinomio en dos factores binomios cuyo primer término será la raíz cuadrada del término x^2.
- El signo del primer binomio será el mismo signo que tenga el término "bx", el signo del segundo binomio será igual a la multiplicación de los signos de "bx" y de "c".
- Si los dos factores tienen signos iguales entonces se buscan dos números cuya suma sea igual que el valor absoluto del factor "b" de "bx", y cuyo producto sea igual al valor absoluto del factor "c", estos números son los segundos términos de los factores binomios.
- Si los dos factores tienen signos diferentes entonces se buscan dos números cuya diferencia sea igual que el valor absoluto del factor "b" de "bx", y cuyo producto sea igual al valor absoluto del factor "c", el *mayor* de estos números será el segundo término del primer factor binomio, y el *menor* de estos números será el segundo término del segundo factor binomio.

Por ejemplo:

$$m^2 + 8m + 15$$

$$\sqrt{m^2} + 8m + 15$$

$$(\,m + \quad)(m + \quad)$$

$$(m + 3)(m + 5)$$

EJERCICIO 07: resuelve (en hojas aparte) los siguientes casos Trinomio de la Forma: $x^2 + bx + c$.

1. $x^2 + 10x + 24$	**2.** $a^2 - 2a - 24$	**3.** $a^2m^4 + am^2 - 380$
4. $x^6 - 21x^3m + 98m^2$	**5.** $x^2 + 7x + 10$	**6.** $a^2 + 42a + 432$
7. $n^2 + 6n - 16$	**8.** $x^2 + 5x + 6$	**9.** $x^2 - 7x + 12$
10 . $x^2 + 2x - 15$	**11.** $x^2 + 5x + 6$	**12.** $a^2 - 2a - 15$
13. $n^2 - 6n - 40$	**14.** $x^2 + 7x + 10$	**15.** $x^2 + 4x - 21$

CASO TRINOMIO DE LA FORMA AX² +BX + C

Este tipo de trinomio se diferencia del anterior debido a que el termino al cuadrado se encuentra precedido por un coeficiente diferente de uno (debe ser positivo). Este se trabaja de otra forma que se describe en el siguiente procedimiento:

Factorizar $3m^2 + 8m + 5$

1^er^ paso $3(3m^2 + 8m + 5) \quad = (3m)^2 + 8(3m) + 15$

2° paso $(3m \quad)(3m \quad)$

3^er^ paso $\dfrac{(3m \quad)(3m \quad)}{3}$

4° paso $\dfrac{(3m + \quad)(3m + \quad)}{3}$

5° paso $\dfrac{(3m + 3)(3m + 5)}{3}$

Simplificar $(m + 1)(3m + 5)$

Imagen de AulaFacil.com para usos educativos.

CASO ESPECIAL

$$6x^4 + 5x^2 - 6$$

$$(6)\ 6x^4 + (6)5x^2 - (6)6 =$$

$$36x^2 + (6)5x^2 - 36 =$$

$$\frac{(6x^2 + 9)(6x^2 - 4)}{3 \times 2} =$$

$$(2x^2 + 3)(3x^2 - 2)$$

Siempre que sea posible hay que realizar la división indicada que nos queda de este tipo de trinomio, sin olvidar que cada factor del denominador que se simplifique se corresponde a todos los términos de uno solo de los binomios.

Alégrate, joven, en tu juventud, y tome placer tu corazón en los días de tu adolescencia; y anda en los caminos de tu corazón y en la vista de tus ojos; pero sabe, que sobre todas estas cosas te juzgará Dios. Eclesiastés 11:9

EJERCICIO 08: resuelve (en hojas aparte) los siguientes casos de "Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$".

1. $2x^2 + 3x - 2$	**2.** $15m^2 + 16m - 15$	**3.** $30x^2 + 13x - 10$
4. $6m^2 - 13am - 15a^2 = (m - 3a)(bm + 5a)$		**5.** $18a^2 + 17ay - 15y^2)$
6. $20x^2 + 7x - 6$	**7.** $18a^2 - 13a - 5$	**8.** $6x^2 - 7x - 3$
9. $20x^2 + 7x - 6$	**10.** $2x^2 + 3x - 2$	**11.** $5x^2 + 13x - 6$
12. $4a^2 + 15a + 9$	**13.** $20y^2 + y - 1$	**14.** $3x^2 - 5x - 2$
15. $6x^2 - 5x - 6$		

Recordando el tema de productos notables, en donde tenemos:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

En este caso la factorización es realizar la operación inversa a esta:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

Para reconocerlo se deben tomar en cuenta los siguientes puntos:

- ✓ Debe tener cuatro términos, y estar ordenado con respecto a una letra.
- ✓ Dos de sus términos, el 1º (a^3) y el 4º (b^3), deben poseer raíz cúbica exacta.
- ✓ El segundo término debe ser igual al triple producto del cuadrado de la raíz cúbica del primer término por la raíz cúbica del cuarto termino [$3(a)^2(b)$].
- ✓ El tercer término debe ser igual al triple producto de la raíz cúbica del primer término por el cuadrado la raíz cúbica del cuarto termino [$3(a)(b)^3$].
- ✓ El segundo y el cuarto termino deben tener el mismo signo y puede ser positivo o negativo, el primer y tercer término siempre son positivos (si el primer y tercer término son negativos realizar factor común con el factor -1).
- ✓ Si todos los términos son positivos el resultado es el cubo de la suma de dos cantidades $(a + b)^3$, si hay términos negativos el resultado es el cubo de la diferencia de dos cantidades $(a - b)^3$.

Factorizar:	$27a^3 - 8b^6 - 54a^2b^2 + 36ab^4$	
Ordenamos	$27a^3 - 54a^2b^2 + 36ab^4 - 8b^6$	
Raíces	$27a^3 = 3a$	$8b^6 = 2b^2$
Productos	$3(3a)^2(2b^2) = 54a^2b^2$	$3(3a)(2b^2)^2 = 36ab^2$
Resultado	$(3a - 2b^2)^3$	

CASO SUMA O DIFERENCIA DE CUBOS PERFECTOS

En este caso de factorización es importante que tengas la noción de lo que son productos notables:

$$\frac{x^3 + y^3}{x + y} = x^2 - xy + y^2 \qquad \frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2$$

Pero en la división exacta el dividendo es igual al divisor multiplicado por el cociente, efectuándolo nos queda:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) \qquad x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

De donde se deducen las siguientes reglas:

- ✓ La suma de dos cubos perfectos se descompone en dos factores, el primero es la suma de sus raíces cúbicas, y el segundo se compone del cuadrado de la primera raíz menos el producto de ambas raíces más el cuadrado de la segunda raíz.
- ✓ La diferencia de dos cubos perfectos se descompone en dos factores, el primero es la diferencia de sus raíces cúbicas, y el segundo se compone del cuadrado de la primera raíz más el producto de ambas raíces más el cuadrado de la segunda raíz.

Procedimiento:

Factorizar:	$27a^3 - 8b^6$
Raíces	$27a^3 = 3a \qquad 8b^6 = 2b^2$
Productos	$(3a)^2 = 9a^2 \qquad (3a)(2b^2) = 6ab^2 \qquad (2b^2)^2 = 4b^4$
Resultado	$(3a - 2b^2)(9a^2 + 6ab^2 + 4b^4)$

CASO ESPECIAL

$$1 + (x + y)^3$$

$$[1 + (x + y)(1^2 - 1(x + y) + (x + y)^2]$$

$$(1 + x + y)(1 - (x + y) + (x + y)^2)$$

$$(1 + x + y)(1 - x - y + x^2 + 2xy + y^2)$$

EJERCICIO 09: resuelve (en hojas aparte) los siguientes casos de cuatrinomio y suma o diferencia de cubos.

1. $m^3 + 15m^2 + 75m + 125$

2. $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$

3. $1 + a^3$

4. $125x^{12} + 600x^8y^5 + 960x^4y^{10} + 512y^{15}$

5. $(x - y)^3 - 8$

6. $x^6 - 8y^{12}$

7. $216^3 - 756x^2y^2z + 882xy^4z^2 - 343y^6z^3$

8. $x^3 - 27$

9. $64x^9 - 125y^{12} - 240x^6y^4 + 300x^3y^8$

10. $(m - 2)^3 + (m - 3)^3$

11. $27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$

12. $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$

13. $64x^3 + 144x^2 + 180x + 27$

14. $a^3b^3 + 3a^2b^2x + 3abx^2 + x^3$

15. $x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8$

SUMA O DIFERENCIA DE DOS POTENCIAS IGUALES

Es importante tener la noción de los cocientes notables, recordemos que:

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 \cdots + b^{n-1}$$

Pero en la división exacta el dividendo es igual al divisor multiplicado por el cociente, al despejarlo nos queda:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1})$$

Y esto es válido para cualquier diferencia de dos potencias iguales ya sean impares o pares.

Así, también:

$$\frac{a^n + b^n}{a + b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + b^{n-1} \quad \text{únicamente si “n” es impar}$$

Al despejarlo nos queda:

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + b^{n-1})$$

Que es válido para cualquier suma de dos potencias iguales *impares* únicamente (con pares no funciona).

Si tomamos también:

$$\frac{a^n - b^n}{a + b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - b^{n-1} \quad \text{únicamente si “n” es par}$$

Al despejarlo nos queda:

$$a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - b^{n-1})$$

Que es válido para cualquier diferencia de dos potencias iguales *pares* únicamente (con impares no funciona).

Procedimiento:

- ✓ Clasificar la expresión en positiva o negativa, y en par o impar (si son positivas y pares no se pueden realizar por este método).
- ✓ Se sacan las raíces de cada término.
- ✓ Se coloca el primer factor el cual es un binomio cuyo primer término es la raíz del primer término dado y el segundo término es la raíz del segundo término dado.
- ✓ El signo del primer factor (binomio) será el mismo que tiene la expresión dada.
- ✓ Se crea el segundo factor (un factor polinomio) en el cual existirá un número de términos igual al exponente de la expresión dada (los siguientes pasos son solo para el segundo factor).
- ✓ En cada término se multiplicara el término de la izquierda por el término de la derecha de la expresión dada
- ✓ En el primer término del factor polinomio el factor de la izquierda tendrá un exponente igual a “n – 1”, y el factor derecho tendrá un exponente de cero.
- ✓ Para los exponentes de los siguientes términos, en el caso del factor de la izquierda irán disminuyendo en una unidad, y los del término de la derecha irán aumentando también en una unidad (si se suman los exponentes de los dos términos siempre será igual a n-1).
- ✓ Si el binomio es negativo todos los términos del polinomio son positivos, si el binomio es positivo impar los signos del polinomio se alternarán (+ ó –) comenzando por el “+”.
- ✓ Cuando en el polinomio, el exponente del término de la derecha sea igual a n-1 damos por terminada la respuesta.

Por ejemplo:

Si es la diferencia

Clasificación	$m^8 - n^8$	expresión negativa par	
Raíces	raíz 8	$m^8 = m$	$n^8 = n$
Binomio	$(m - n)$		
Polinomio	$[(m)^7(n)^0\ (m)^6(n)^1\ (m)^5(n)^2\ (m)^4(n)^3\ (m)^3(n)^4\ (m)^2(n)^5\ (m)^1(n)^6\ (m)^0(n)^7]$		
Signos	$[m^7 + m^6n + m^5n^2 + m^4n^3 + m^3n^4 + m^2n^5 + mn^6 + n^7]$		

Respuesta $(m-n)(m^7+m^6n+m^5n^2+m^4n^3+m^3n^4+m^2n^5+mn^6+n^7)$

Si es la suma:

Clasificación m^9+n^9 expresión positiva impar

Raíces raíz 9 $m^9 = m$ $n^9 = n$

Binomio $(m+n)$

Polinomio $[(m)^8(n)^0\ (m)^7(n)^1\ (m)^6(n)^2\ (m)^5(n)^3\ (m)^4(n)^4\ (m)^3(n)^5\ (m)^2(n)^6\ (m)^1(n)^7\ (m)^0(n)^8]$

Signos $[m^8-m^7n+m^6n^2-m^5n^3+m^4n^4-m^3n^5+m^2n^6-mn^7+n^8]$

Respuesta $(m+n)(m^8-m^7n+m^6n^2-m^5n^3+m^4n^4-m^3n^5+m^2n^6-mn^7+n^8)$

AulaFacil.com

EJERCICIO 10: resuelve (en hojas aparte) los siguientes casos de suma o diferencia de potencias iguales.

1. a^5+1	**6.** b^4-81	**11.** $x^5+0{,}00001$	**16.** x^6+64
2. m^7-n^7	**7.** b^4-81	**12.** $-125+x^3$	**17.** x^7+128a^7
3. x^7+128	**8.** x^7+1	**13.** $-x^6+64$	**18.** $a^7x^7+128b^7$
4. x^5+32	**9.** x^7-y^7	**14.** $-x^6+64$	**19.** x^3+64y^3
5. x^3-8	**10.** $x^6-\frac{1}{64}$	**15.** $8x^3+27$	**20.** $243-32x^5$

CASOS ESPECIALES DE FACTORIZACIÓN

Como complemento de lo aprendido en la unidad anterior, te mencionamos los casos especiales de cada caso de factorización que aprendiste. Y, se agrega el último caso de factorización que debes aprender.

CASO ESPECIAL - TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Ejemplo 1: $a^2 + 2a(a - b) + (a - b)^2$

Raíz cuadrada de $a^2 = a$
Raíz cuadrada de $(a - b)^2 = (a - b)$
Doble producto sus raíces: $(2 \text{ X } a \text{ X } (a - b) = 2a(a - b)$ (cumple)

Respuesta: $(a + (a - b))^2$
$(a + a - b) = (2a - b)^2$
Ejemplo 2: $(x + y)^2 - 2(x+ y)(a + x) + (a + x)^2$

Raíz cuadrada de $(x + y)^2 = (x + y)$
Raíz cuadrada de $(a + x)^2 = (a + x)$

Doble producto sus raíces: $(2 \text{ X } (x + y) \text{ X } (a + x)) = 2(x + y)(a + x)$ (cumple)

Respuesta: $((x + y) - (a + x))^2$
$(x + y - a - x)^2 = (y - a)^2$

CASO ESPECIAL DIFERENCIA DE CUADRADOS PERFECTOS

Ejemplo 1: $(a - 2b)^2 - (x + y)^2$

$(a - 2b) \quad (x + y) \quad =$ Raíces

Se multiplica la suma por la diferencia

Respuesta: $((a - 2b) + (x + y)) \ ((a - b) - (x + y))$

$(a - 2b + x + y) \quad (a - 2b - x - y)$

Ejemplo 2: $16a^{10} - (2a^2 + 3)^2$

$4a^5 \quad (2a^2 + 3) =$ Raíces

Se multiplica la suma por la diferencia

Respuesta: $((4a^5 + (2a^2 + 3))(4a^5 - (2a^2 + 3))$

$(4a^5 + 2a^2 + 3)(4a^5 - 2a^2 - 3)$

Ejemplo 3: $36(m + n)^2 - 121(m - n)^2$

$6(m + n) \quad 11(m - n) =$ Raíces

Se multiplica la suma por la diferencia

Respuesta: $((6(m + n) + 11(m - n)) (6(m + n) - 11(m - n))$

$(6m + 6n + 11m - 11n) (6m + 6n - 11m + 11n)$

$(17m + 5n) (5m + 17n)$

CASO ESPECIAL COMBINACIÓN TRINOMIO CUADRADO PERFECTO Y DIFERENCIA DE CUADRADOS PERFECTOS

Ejemplo 1: $a^2 + 2ab + b^2 - x^2$

$(a^2 + 2ab + b^2) - x^2$

$(a + b)^2 - x^2$

Respuesta: $(a + b + x)(a + b - x)$

Ejemplo 2: $1 - a^2 + 2ax - x^2$

$1 - (a^2 + 2ax - x^{2)}$

$1 - (a - x)^2$

Respuesta: $(1 - a + x) (1 + a + x)$

Sucesivamente…

Ejemplo 3: $16a^2 - 1 - 10m + 9x^2 - 24ax - 25m^2$

$(16a^2 - 24ax + 9x^2) - (1 + 10m + 25m^2)$

$(4a - 3x)^2 - (1 + 5m)^2$

Respuesta: $(4a - 3x + 5m + 1)(4a - 3x - 5m - 1)$

CASO ESPECIAL FACTORIZAR LA SUMA DE DOS CUADRADOS

Ejemplo 1:

$x^4 + 64y^4$

$$\begin{array}{llll} x^4 & & + 64y^4 & \\ & + 16x^2y^2 & & - 16x^2y^2 \\ \hline x^4 & + 16x^2y^2 & + 64y^4 & - 16x^2y^2 \end{array}$$

$(x^4 + 16x^2y^2 + 64y^4) \quad - 16x^2y^2$

$(x^2 + 8y^2)^2 \quad - 16x^2y^2$

Alégrate, joven, en tu juventud, y tome placer tu corazón en los días de tu adolescencia; y anda en los caminos de tu corazón y en la vista de tus ojos; pero sabe, que sobre todas estas cosas te juzgará Dios. Eclesiastés 11:9

Respuesta: $(x^2 + 8y^2 + 4xy)\ (x^2 + 8y^2 - 4xy)$
$(x^2 + 4xy + 8y^2)\ (x^2 - 4xy + 8y^2)$

Ejemplo 2:

$4m^4 + 81n^4$

$$\begin{array}{llll} 4m^4 & & +\ 81n^4 & \\ & +\ 36m^2n^2 & & -36m^2n^2 \\ \hline 4m^4 & +\ 36m^2n^2 & +\ 81n^4 & -\ 36m^2n^2 \end{array}$$

$(4m^4 + 36m^2n^2 + 81n^4) - 36m^2n^2$

$(2m^2 + 9n^2)^2 - 6m^2n^2$

Respuesta: $(2m^2 + 9n^2 - 6mn)\ (2m^2 + 9n^2 - 36mn)$
$(2m^2 + 6mn + 9n^2)\ (2m^2 - 6mn + 9n^2)$

Ejemplo 3:

$81a^4 + 64b^4$

$$\begin{array}{llll} 81a^4 & & +\ 64b^4 & \\ & +144a^2b^2 & & -\ 144a^2b^2 \\ \hline 81a^4 & +144\_a^2b^2 & +64b^4 & -144\_a^2b^2 \end{array}$$

$(81a^4 + 144\_a^2b^2 + 64b^4) - 144\_a^2b^2$

$(9a^2 + 8b^2)^2 - 144\ a^2b^2$

Respuesta: $(9a^2 + 8b^2 - 12\_ab)\ (9a^2 + 8b^2 - 12\_ab)$
$(9a^2 + 12\_ab + 8b^2)\ (9a^2 - 12\_ab + 8b^2)$

CASO ESPECIAL TRINOMIO DE LA FORMA $ax^2 + bx + c$

Ejemplo 1:

$6x^4 + 5x^2 - 6$

$(6)\ 6x^4 + (6)5x^2 - (6)\ 6$

$36x^4 + (6)5x^2 - 36$

$= \dfrac{(6x^2 + 9)\ (6x^2 - 4)}{3 \quad x \quad 2}$

$= (2x^2 + 3)\ (3x^2 - 2)$

Ejemplo 2:

$6m^2 - 13am - 15a^2$

$(6)\ 6m^2 - (6)\ 13am - (6)15a^2$

$36m^2 - (6)\ 13am - 90\ a^2$

$= \dfrac{(6m - 18a)\ (6m + 5a)}{6 \quad x \quad 1}$

$= (m - 3a)\ (6m + 5a)$

Alégrate, joven, en tu juventud, y tome placer tu corazón en los días de tu adolescencia; y anda en los caminos de tu corazón y en la vista de tus ojos; pero sabe, que sobre todas estas cosas te juzgará Dios. Eclesiastés 11:9

Ejemplo 3:

$18a^2 + 17\,ay - 15y^2$

$(18)\,18a^2 + (18)17\,ay - (18)\,15y^2$

$324a^2 + (18)\,17ay - 270y^2$

$= \dfrac{(18a + 27)\quad(18a - 10)}{9 \quad x \quad 2}$

$= (2a + 3y)\,(9a - 5y)$

CASO ESPECIAL SUMA O DIFERENCIA DE CUBOS PERFECTOS

Ejemplo 1:

$1 + (x + y)^3$
$(1 + (x + y)\,(1^2 - 1(x + y) + (x + y)^2)$

Respuesta: $(1 + x + y)\,(1 - (x + y) + (x + y)^2)$
$(1 + x + y)\,(1 - x - y + x^2 + 2xy + y^2)$

Ejemplo 2:

$(m - 2)^3 + (m - 3)^3$
$((m - 2) + (m - 3)\,((m - 2)^2 - ((m - 2)\,(m - 3) + (m - 3)^2)$

Respuesta: $(m - 2 + m - 3)\,((m^2 - 4m + 4) - ((m - 2)\,(m - 3)) + (m^2 - 6m + 9))$
$(2m - 5)\,(m^2 - 4m + 4) - (m^2 - 3m - 2m + 6) + (m^2 - 6m + 9))$
$(2m - 5)\,(m^2 - 4m + 4 - m^2 + 3m + 2m - 6 + m^2 - 6m + 9)$
$(2m - 5)\,(m^2 - 5m + 7)$

Ejemplo 3:

$(x - y)^3 - 8$
$((x - y) - 2)\,((x - y)^2 + 2(x - y) + (2)^2)$

Respuestas: $(x - y - 2)\,(x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 4)$

SUMA O DIFERENCIA DE POTENCIAS IMPARES IGUALES

Cuando no es factor común o diferencia de cuadrado perfecto se prueba la suma o diferencia de potencias impares iguales, la primera regla es que sea suma o resta, que tengan potencias iguales pero impares.

1. Primero se extrae la raíz igual a la cantidad que están elevados los términos.
2. A Las raíces se las opera con el mismo signo, multiplicado por las raíces pero en un orden siempre que es el primer término elevado a una potencia menos a la inicial y la segunda elevado a la 0, la primera va bajando hasta llegar a 0 y la segunda sube hasta que hasta llegar a n^x potencia menos que la potencia inicial.

1) $\underset{\downarrow\, a}{a^5} + \underset{\downarrow\, b}{b^5} = (a + b)\,(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$

2) **$(m^5 - n^5)$** es igual a dos factores:

El primero es la diferencia de las raíces de los términos ***(m – n)***

El segundo es el primer término elevado a la 5-1=4, **más** el 1º término elevado a la 5 – 2 = 3 por el 2º término elevado a la 1, **más** el 1º término elevado a la 5-3=2 por el 2º término elevado al cuadrado, **más** el 1º término elevado a la 5 – 4 = 1 por el 2º término elevado al cubo, **más** el 2º término elevado a la cuarta.

$= (m^4 + m^3\,n + m^2\,n^2 + mn^3 + n^4)$

EJERCICIO 11: factorizar las siguientes expresiones hasta mínimas expresión.

1) m^5+32	**2)** x^5+32	**3)** x^7-1	**4)** $1-x^5$	**5)** a^7+b^7
6) a^5+243	**7)** $32-m^5$	**8)** $1+243x^5$	**9)** $243-32b^5$	**10)** $a^5-b^5c^5$

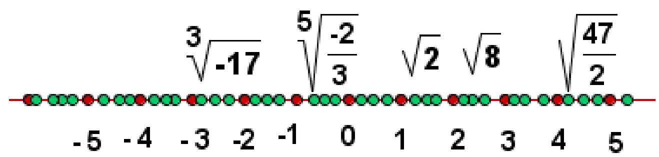
REPRESENTACIÓN REAL

Recordemos que el *Conjunto de los Números Reales,* está formado por números *racionales* e *irracionales*.

Con los *números reales* podemos realizar *todas las operaciones, excepto la radicación de índice par y radicando negativo, y la división por cero.*

LA RECTA REAL

A todo *número real* le corresponde un punto de la recta y a *todo punto de la recta un número real.*



REPRESENTACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES

Los **números reales** pueden ser representados en la recta con tanta aproximación como queramos, pero hay casos en los que podemos representarlos de forma exacta.

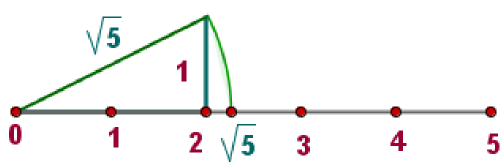
Ejemplo:

Representar: $\sqrt{5}$

Tomamos un rectángulo de base 2 y lado 1. Entonces, usando el teorema de Pitágoras sabemos que su diagonal mide $\sqrt{5}$

En efecto, pues $2^2 + 1^2 = d^2$, de donde, $5 = d^2$ y, por tanto, $d = \sqrt{5}$
Basta coger esta medida y transportarla con el compás (tomando centro en 0 y con radio la diagonal de nuestro rectángulo). De este modo, representamos en la recta real el número $\sqrt{5}$.

$\sqrt{5} = \sqrt{2^2+1^2}$



VALOR ABSOLUTO

Valor absoluto de un número real **a**, se escribe **|a|**, es el mismo número a cuando es positivo o cero, y opuesto de a, si a es negativo.

$$|a| = \begin{cases} -a & \text{si } a < 0 \\ a & \text{si } a \geq 0 \end{cases}$$

$|5| = \mathbf{5}$ $|-5| = \mathbf{5}$ $|0| = \mathbf{0}$

$|x| = 2$ $x = -2$ $\mathbf{x = 2}$

$|x| < 2$ $-2 < x < 2$ $\mathbf{x \in (-2, 2)}$

$|x| > 2$ $x < -2$ ó $x > 2$ $\mathbf{(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)}$

$|x - 2| < 5$ $-5 < x - 2 < 5$

$-5 + 2 < x < 5 + 2$ $\mathbf{-3 < x < 7}$

Propiedades:

1) Los números opuestos tienen igual valor absoluto.

$$|a| = |-a|$$

Ejemplo: **|5| = |−5| = 5**

2) El valor absoluto de un producto es igual al producto de los valores absolutos de los factores.

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

Ejemplo:

$|5 \cdot (-2)| = |5| \cdot |(-2)|$
$|-10| = |5| \cdot |2|$
$\mathbf{10 = 10}$

3) El valor absoluto de una suma es menor o igual que la suma de los valores absolutos de los sumandos**.**

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Ejemplo:

$|5 + (-2)| \leq |5| + |(-2)|$
$|3| \leq |5| + |2|$
$\mathbf{3 \leq 7}$

EJERCICIO CORTO 01.

1. Clasifica los números (según pertenezcan a su conjunto numérico). $\frac{\Pi}{2}, \quad \sqrt{36}, \quad 2.25111\ldots, \quad \sqrt{-5}, \quad \frac{75}{-5}$
2. Representa en la recta numérica la siguiente expresión. $\sqrt{17}$
3. Determina el valor absoluto de las relaciones siguientes, y represéntalas en la recta real. $|x| < 1, |x| \leq 1, |x| > 1, |x| \geq 1$

POTENCIA REAL

Una multiplicación formada por factores iguales se puede escribir en forma de potencia: a^b, donde a, conocida como la base, es el número que se repite y b, conocido como el exponente, es el número de veces que se repite el factor.

Por ejemplo, tendríamos que:

$$6^5 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$$

Para este ejemplo de potencia tendríamos que la base es **6**, mientras que el exponente es **5**.

POTENCIAS CON EXPONENTES ENTEROS

Potencia con exponente entero positivo. Por notación, cuando en una potencia el exponente es entero positivo, tenemos que:

$$a^b = \underbrace{a \cdots a}_{b \text{ veces}},$$

$$-a^b = -(\underbrace{a \cdots a}_{b \text{ veces}}),$$

$$(-a)^b = \underbrace{(-a)\cdots(-a)}_{b \text{ veces}}.$$

Para determinar el signo de una potencia con exponente entero tendremos en cuenta que:

1) **Las potencias con exponente par son siempre positivas.** Esto quiere decir que, si tenemos una potencia a^b, entonces:

   - Si a es positivo y b es par, entonces a^b es positivo.
   - Si a es negativo y b es par, entonces a^b es positivo.

   Ejemplo:

   $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$

   $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$

   $(-5)^4 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = 625$

2) **Las potencias con exponente impar siempre tienen el mismo signo que su base.** Esto quiere decir que, si tenemos una potencia a^b, entonces:

   - Si a es positivo y b es impar, entonces a^b es positivo.
   - Si a es negativo y b es impar, entonces a^b es negativo.

   Ejemplos:

   $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

   $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

   $(-5)^5 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = 3125$

3) **Potencia con exponente entero negativo.** Una potencia con exponente negativo es igual al inverso multiplicativo de la base de la potencia elevado al exponente positivo (siempre que la base sea distinta de cero). Así, tenemos que:

$$a^{-b} = \left(\frac{1}{a}\right)^b = \frac{1}{a^b}, \quad a \neq 0.$$

   Y para $\left(\frac{1}{a}\right)^b$ se cumplen las mismas propiedades mencionadas anteriormente para exponentes positivos.

   Ejemplo:

$$2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(-2)^{-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8}$$

EJERCICIO CORTO 02.

Calcula los valores de las siguientes potencias:

1. $16^{\frac{3}{2}} =$ **2.** $8^{\frac{2}{3}} =$ **3.** $81^{0.75} =$ **4.** $8^{0.333\ldots} =$

POTENCIAS DE NÚMEROS RACIONALES

1) **Potencia de número positivo.** Cuando en una potencia la base es fraccionaria, elevamos tanto el numerador como el denominador al exponente.

$$\left(\frac{c}{d}\right)^b = \frac{c^b}{d^b}$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

2) **Potencia con base fraccionaria y exponente negativo.** Una potencia con base fraccionaria y exponente negativo es igual al inverso multiplicativo de la base elevado al exponente positivo. Recordemos que el inverso de una fracción es igual a cambiar el numerador y el denominador entre sí, esto es, el inverso de $\frac{c}{d} = \frac{d}{c}$.

Por lo tanto, tenemos que:

$$\left(\frac{c}{d}\right)^{-b} = \left(\frac{d}{c}\right)^b = \frac{d^b}{c^b}$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{2^3} = \frac{125}{8}$$

3) **Potencia con exponente racional o fraccionario.** Una potencia con exponente fraccionario es igual a una raíz cuyo índice es el denominador de la fracción y el exponente del radicando es el numerador.

4) **Potencia de exponente racional positivo**

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

Ejemplos:

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$$

$$2^{0.25} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$$

En este caso pasamos el exponente que es un decimal exacto a su fracción equivalente.

5) **Potencia de exponente racional negativo.** Al igual que en los casos anteriores, cuando el exponente es fraccionario negativo, es equivalente a elevar el inverso multiplicativo de la base al exponente positivo. Así, tendríamos que:

$$a^{-\frac{n}{m}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{n}{m}} = \frac{1}{a^{\frac{n}{m}}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}$$

Ejemplo:

$$2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

PROPIEDADES DE POTENCIAS

1) **Un número elevado a 0 es igual a 1.**

$$a^0 = 1.$$

Por ejemplo:

$$7^0 = 1.$$

2) **Un número elevado al exponente 1 es igual a sí mismo.**

$$a^1 = a.$$

Por ejemplo:

$$7^1 = 7.$$

3) **Producto de potencias con la misma base.** Cuando multiplicamos dos potencias con la misma base, el resultado es otra potencia con la misma base elevada a la suma de los exponentes originales.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Ejemplo:

$$(-2)^2 \cdot (-2)^3 = (-2)^5 = -32.$$

$$2^4 \cdot 2^{-1} = 2^{(4+(-1))} = 2^3 = 8.$$

4) **División de potencias con la misma base.** Cuando tenemos la división de dos potencias con la misma base, el resultado es otra potencia con la misma base elevada al exponente del numerador menos el exponente del denominador.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

Ejemplo:

$$\frac{(-2)^2}{(-2)^3} = (-2)^{(2-3)} = (-2)^{-1} = \frac{1}{(-2)^1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\frac{2^2}{2^{-1}} = 2^{(2-(-1))} = 2^3 = 8.$$

5) **Potencia de una potencia.** Cuando tenemos una potencia de una potencia, el resultado es otra potencia con la misma base elevada al producto de los exponentes.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$

Ejemplo:

$$(2^2)^3 = 2^{2\cdot 3} = 2^6 = 64.$$

$$((-2)^2)^{-2} = (-2)^{2\cdot(-2)} = (-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}.$$

6) **Producto de potencias con el mismo exponente.** Cuando tenemos la multiplicación de dos potencias con el mismo exponente, el resultado es una nueva potencia en donde la base es la multiplicación de las bases originales elevada al mismo exponente.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n .$$

Ejemplo:

$$2^2 \cdot 3^2 = (2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36.$$

$$(-2)^3 \cdot 2^3 = ((-2) \cdot 2)^3 = (-4)^3 = -64.$$

7) **Cociente de potencias con el mismo exponente.** Cuando tenemos el cociente de dos potencias con el mismo exponente, el resultado es una nueva potencia en donde la base es el cociente de las bases originales elevada al mismo exponente.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Ejemplo:

$$\frac{(-6)^3}{2^3} = \left(\frac{-6}{3}\right)^3 = (-2)^3 = -8.$$

$$\frac{6^2}{2^2} = \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3^2 = 9.$$

PROPIEDADES POTENCIA RACIONAL

1)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$

2)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$$

3) Producto de potencias con la misma base:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2+3} = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$$

4) División de potencias con la misma base:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^7 : \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{7-3} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

5) Potencia de una potencia:

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \cdot n}$$

Ejemplo:

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3 \cdot 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1^6}{2^6} = \frac{1}{64}$$

6) Producto de potencias con el mismo exponente:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a \cdot c}{b \cdot d}\right)^n$$

Por ejemplo:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^3 = \left(\frac{6}{35}\right)^3$$

7) Cociente de potencias con el mismo exponente**:**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a \cdot d}{b \cdot c}\right)^n$$

Por ejemplo:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 : \left(\frac{2}{7}\right)^3 = \left(\frac{21}{10}\right)^3$$

EJERCICIO 12. En tu cuaderno de apuntes:

Realiza las siguientes potencias de exponente entero y base racional:

1. $\left(\frac{a}{b}\right)^n =$ **2.** $\left(\frac{2}{3}\right)^4 =$ **3.** $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} =$

4. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} =$ **5.** $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} =$ **6.** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} =$

Realiza las siguientes operaciones con potencias de fracciones:

7. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 =$ **8.** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 =$ **9.** $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

10. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$ **11.** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} =$ **12.** $\left(\frac{2}{3}\right)^2 : \left(\frac{2}{3}\right)^3 =$

13. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{3} =$

14. $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

15. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

16. $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

17. $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{-3} =$

18. $\left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{3}\right\}^{-4} =$

19. $\left(\frac{4}{9}\right)^{-2} : \left(\frac{27}{8}\right)^{-3} =$

Halla las operaciones de fracciones con potencias:

20.

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\left(\frac{81}{16}\right)^{-2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-5}\left(\frac{2}{3}\right)\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\right]^{-2}\left(\frac{8}{27}\right)^{3}} =$$

EJERCICIO PRACTICANDO 01.

1. $\left[\left(2-1\frac{3}{5}\right)^{2}+\left(\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{3}\right)^{4}\cdot\left(7\frac{1}{2}\right)^{3}\right]:\left(5-\frac{6}{5}\right)=$

Primero operamos con los productos y números mixtos de los paréntesis.

$$=\left[\left(2-\frac{8}{5}\right)^{2}+\left(\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{6}{15}\right)^{4}\cdot\left(\frac{15}{2}\right)^{3}\right]:\left(5-\frac{6}{5}\right)=$$

Operamos en el primer paréntesis, quitamos el segundo, simplificamos en el tercero y operamos en el último.

$$=\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{2}+\frac{5}{8}-\frac{3}{4}-\left(\frac{2}{5}\right)^{4}\cdot\left(\frac{15}{2}\right)^{3}\right]:\frac{19}{5}=$$

Realizamos el producto y lo simplificamos.

$$=\left(\frac{4}{25}+\frac{5}{8}-\frac{3}{4}-\frac{54000}{5000}\right):\frac{19}{5}=\left(\frac{4}{25}+\frac{5}{8}-\frac{3}{4}-\frac{54}{5}\right):\frac{19}{5}=$$

Realizamos las operaciones del paréntesis.

$$=\frac{32+125-150-2160}{200}:\frac{19}{5}=$$

Hacemos las operaciones del numerador, dividimos y simplificamos el resultado.

$$=\frac{-2153}{200}:\frac{19}{5}=-\frac{10765}{3800}=-\frac{2153}{760}$$

Opera:

$$\frac{\left(2-\frac{1}{5}\right)^2}{\left(3-\frac{2}{9}\right)^{-1}} : \frac{\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{4}-\frac{2}{7}:\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}:\frac{1}{5}\right)} - 5\frac{1}{7} =$$

$$= \frac{\left(\frac{10-1}{5}\right)^2}{\left(\frac{27-2}{9}\right)^{-1}} : \frac{\left(\frac{30}{28}-\frac{4}{7}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}:\frac{1}{5}\right)} - \frac{35+1}{7} =$$

$$= \frac{\left(\frac{9}{5}\right)^2}{\left(\frac{25}{9}\right)^{-1}} : \frac{\left(\frac{15}{14}-\frac{4}{7}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{12}\right)} - \frac{36}{7} =$$

$$= \frac{\left(\frac{9}{5}\right)^2}{\left(\frac{25}{9}\right)^{-1}} : \frac{\left(\frac{15-8}{14}\right)^3}{\left(\frac{6-5}{12}\right)} - \frac{36}{7} =$$

$$= \frac{\left(\frac{9}{5}\right)^2}{\left(\frac{25}{9}\right)^{-1}} : \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\frac{1}{12}} - \frac{36}{7} =$$

$$= \frac{\frac{81}{25}}{\frac{9}{25}} : \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{12}} - \frac{36}{7} = \frac{81}{9} : \frac{12}{8} - \frac{36}{7} =$$

$$= 9 : \frac{3}{2} - \frac{36}{7} = \frac{18}{3} - \frac{36}{7} = 6 - \frac{36}{7} = \frac{42-36}{7} = \frac{6}{7}$$

EJERCICIO CORTO 03. Resuelve las operaciones combinadas y combinadas con potencias**:**

1. $\frac{2}{3}:\left[5:\left(\frac{2}{4}+1\right)-3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\right]=$

2. $\left[\left(2-1\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(7\frac{1}{2}\right)^3\right]:\left(5-\frac{6}{5}\right)=$

3. $\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\left(\frac{81}{16}\right)^{-2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-5}\left(\frac{2}{3}\right)\left[\left(\frac{2}{3}\right)^5\right]^2\left(\frac{8}{27}\right)^3}=$

INFORMACIÓN (INCLUÍDA EN ESTE DOCUMENTO EDUCATIVO) TOMADA DE:

Sitios web:

1. http://matematicaylisto.webcindario.com/polinomios/factoreo/fcgrupos/grupos5.htm#elopuesto
2. http://www.vadenumeros.es/cuarto/ejercicios-de-polinomios.htm
3. http://centros.edu.xunta.es/iesportadaauga/matematicas/exercicios/4eso/solucions_exercicios_4eso_tema2_do_7_o_18.pdf
4. https://es.khanacademy.org/math/algebra/polynomial-factorization/factoring-quadratics-2/a/factoring-by-grouping
5. https://es.answers.yahoo.com/question/index?qid=20110408125501AAfAiDv
6. https://es.khanacademy.org/math/algebra/polynomial-factorization/factoring-quadratics-diff-of-squares/a/factoring-quadratics-difference-of-squares
7. https://brainly.lat/tarea/3665696
8. http://matematica1.com/factorizacion-de-una-diferencia-de-cuadrados-problemas-resueltos/
9. https://sites.google.com/site/nucleodelpensamiento/matematicas/noveno/factorizacion/trinomio-cuadrado-perfecto-por-adicion-y-sustraccion
10. https://zonaintelectual.wordpress.com/trinomio-cuadrado-perfecto-por-adicion-y-sustraccion/
11. http://matematicasfundamentales2012.blogspot.com/2012/11/trinomio-cuadrado-perfecto-por-adicion.html
12. http://tareasuniversitarias.com/trinomio-de-la-forma-x2-bx-c.html
13. http://www.actiweb.es/algebramonicaceron/trinomio_de_la_forma_x2__bx__c.html
14. http://mp.antioquiatic.edu.co/miclase/viewbulletin/1305-ejercicios-resueltos-y-actividad-del-trinomio-de-la-forma-x2-bx-c?groupid=3353
15. http://matematicasfundamentales2012.blogspot.com/2012/11/trinomio-de-la-forma-ax2bxc.html
16. Caso Cubo Perfecto de Binomios (Cuatrinomio)
17. http://www.ipet132.edu.ar/Casos%20de%20Fact/4cuatrinomiocuboperfecto.htm
18. http://matematicaylisto.webcindario.com/polinomios/factoreo/cuatrino/ctocaso.htm
19. https://www.fisicanet.com.ar/matematica/factoreo/ap04_cuarto_caso_de_factoreo.php
20. http://www.algebra.jcbmat.com/id1178.htm
21. https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/aritmetica/reales/numeros-reales.html
22. https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/aritmetica/reales/valor-absoluto-de-un-numero-real-2.html
23. https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/aritmetica/reales/potencias-4.html
24. https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/aritmetica/reales/extraccion-e-introduccion-de-factores-en-un-radical-2.html
25. https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/aritmetica/reales/producto-de-radicales.html
26. https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/aritmetica/reales/potencia-de-radicales.html
27. https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/aritmetica/reales/numeros-reales.html
28. https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/aritmetica/reales/suma-de-radicales.html
29. https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/aritmetica/reales/racionalizacion-de-radicales.html
30. https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/aritmetica/reales/potencia-de-radicales.html
31. https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/aritmetica/reales/cociente-de-radicales.html
32. https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/aritmetica/racionales/numeros-racionales-2.html
33. http://www.continuousreflection.org/grids/